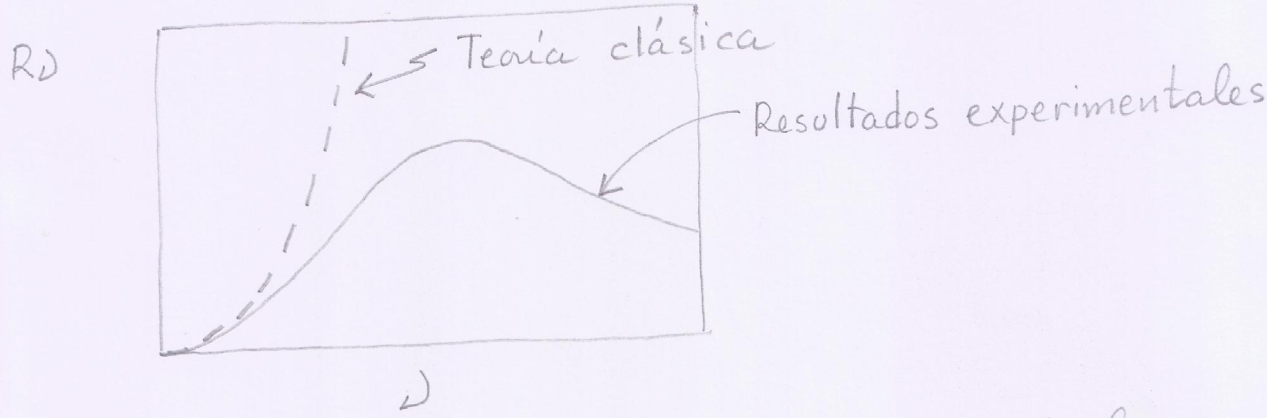
# Teoria de Planck



✓ Para resolver la discrepancia entre teoría y experimento, Planck llegó a considerar la posibilidad de que se violara la ley de equipartición de la energía en que se basaba la teoría. (Eisberg-Resnick, Sección 1-4, pag. 31).




✓ De la figura se observa que la predicción de la teoría clásica coincide con los resultados experimentales a bajas frecuencias ($\nu \to 0$).

✓ Esto quiere decir que cuando $\nu \to 0$, se cumple la ley de equipartición de la energía (física clásica) y por lo tanto el valor promedio de la energía de una onda (presente en la cavidad del cuerpo negro) no depende de la frecuencia $\nu$ de la onda y es igual a $\bar{E}_\nu = kT$ (solo para bajas frecuencias; $\nu \to 0$).

Esto es:

$$\bar{E}_\nu \to kT \qquad (1)$$

cuando $\nu \to 0$

✓ El desacuerdo entre teoría y experimento puede ser eliminado si por alguna razón la energía promedio de cada onda tendiese a cero para ondas con altas frecuencias en lugar de ser $kT$ como "impone" la física clásica.

Esto es:

$$\bar{\varepsilon}_\nu \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } \nu \to \infty \,. \qquad (2)$$

✓ Planck pudo darse cuenta que podía lograr la condición (2), si modificaba el cálculo de $\bar{\varepsilon}$ a partir de $P(\varepsilon)$ (Recordar el documento Radiación térmica 6, pags. 4 y 5) haciéndolo de nuevo pero considerando a la energía $\varepsilon$ de las ondas una variable discreta en lugar de continua.

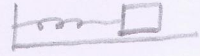
✓ Hay que tener presente que en la física clásica, cualquier ente, partícula u onda, puede solamente poseer una energía en un rango continuo de valores.

# Postulado de Planck (de acuerdo a Eisberg-Resnick, Sección 1.6, pag. 39)

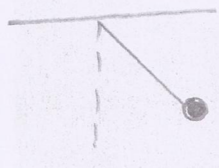
✓ Cualquier ente físico con un grado de libertad, cuya "coordenada" es una función senoidal del tiempo (es decir realiza oscilaciones armónicas simples) sólo puede poseer energías totales $\mathcal{E}$ que satisfacen la relación

$$\mathcal{E} = nh\nu \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

donde $\nu$ es la frecuencia de la oscilación y $h$ es una constante universal.

✓ La palabra "coordenada" denota cualquier cantidad física que describa la condición instantánea del ente. Ejemplos: ✓ la longitud de un resorte 

✓ la posición angular de un péndulo



✓ la amplitud de una onda

✓ Figura 1-14, Sección 1.6, pag. 40, Eisberg-Resnick.

✓ En esta figura se muestra un diagrama de los niveles de energía (segmentos horizontales) de un ente que oscila con movimiento armónico y cuyas energías permitidas están distribuidas en forma discreta de acuerdo al postulado de Planck, ya que solo pueden tener los valores

$\mathcal{E}_n = nh\nu$, es decir
$$\mathcal{E}_0 = 0$$
$$\mathcal{E}_1 = h\nu$$
$$\mathcal{E}_2 = 2h\nu$$
$$\mathcal{E}_3 = 3h\nu$$

✓ En la misma figura se muestra un diagrama de los niveles de energía suponiendo que el ente se considera un sistema clásico cuyas energías están en un rango contínuo.

✓ Ejemplo 1-6, pag. 40, Eisberg-Resnick, Sección 1-6.

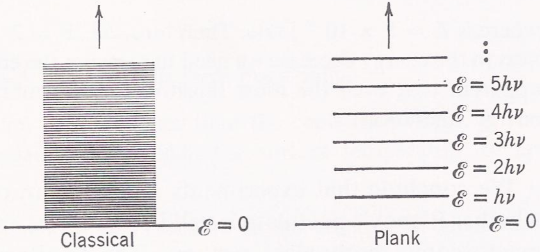
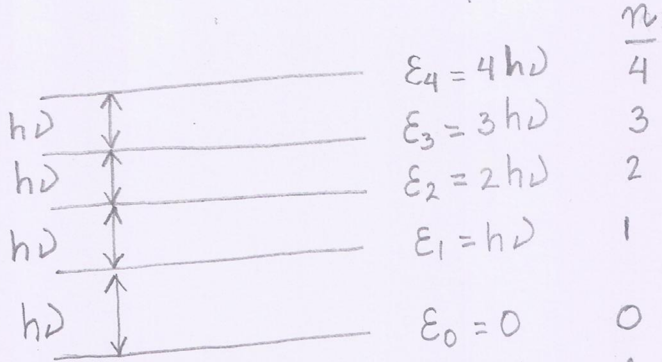



**FIGURE 1-14**

*Left:* The allowed energies in a classical system, oscillating sinusoidally with frequency $\nu$, are continuously distributed. *Right:* The allowed energies according to Planck's postulate are discretely distributed since they can only assume the values $nh\nu$. We say that the energy is quantized, $n$ being the quantum number of an allowed quantum state.

✓ Planck pensó que los "osciladores" presentes en las paredes del cuerpo negro tenían energías discretas separadas por la cantidad $h\nu$.




y que estos osciladores podían emitir lo que se denomina un "cuanto de radiación" igual a $h\nu$ cuando realizan una transición de un estado de energía al estado de energía inmediatamente inferior, por ejemplo: ✓ transición del estado correspondiente al número cuántico $n=1$ ($\varepsilon_1$) al estado asociado a $n=0$ ($\varepsilon_0$)

✓ transición del estado asociado a $n=3$ ($\varepsilon_3$) al estado $n=2$ ($\varepsilon_2$).

✓ Los osciladores también pueden absorber "un cuanto de radiación" $h\nu$ y al hacerlo, simultáneamente realizar una transición de un estado de energía al estado de energía inmediatamente superior.

## Comentarios sobre la Teoría de Planck

- Planck encontró (después de un arduo trabajo) que los osciladores presentes en las paredes de la cavidad del cuerpo negro no deberían tener una distribución contínua de energías sino que sus energías deberían ser discretas

$$\mathcal{E}_n = n h \nu \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Además, un oscilador emite una radiación de frecuencia $\nu$ cuando "cae" de un estado de energía al siguiente estado inmediatamente menor, y "salta" de un estado de energía al siguiente inmediatamente superior, cuando absorbe radiación de frecuencia $\nu$.

- Cada cantidad discreta de energía $h\nu$ se denomina cuanto ( quantum = plural quanta ).

- Con las energías de un oscilador limitadas a tener valores $\mathcal{E}_n = nh\nu$, la energía promedio por oscilador en las paredes de la cavidad del cuerpo negro – o la energía promedio de cada onda estacionaria en la cavidad (cada onda en la cavidad se origina de una carga eléctrica oscilante presente en las paredes de la cavidad) no es $\bar{\varepsilon} = kT$ (caso de distribución contínua de energías de un oscilador) sino

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

como se demuestra a continuación.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum n_i \varepsilon_i}{\sum n_i} = \frac{\sum \frac{n_i}{N} \varepsilon_i}{\sum \frac{n_i}{N}} = \frac{\sum P_i \varepsilon_i}{\sum P_i} \quad (3)$$

$$P_i = A\, e^{-\varepsilon_i/kT} \quad (4)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_i P_i \varepsilon_i}{\sum_i P_i} = \frac{\sum_i e^{-\varepsilon_i/kT} \varepsilon_i}{\sum_i e^{-\varepsilon_i/kT}} \quad (5)$$

✓ Ya que los values de energia son $\varepsilon_n = nh\nu$

con $n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n\, e^{-\varepsilon_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/kT}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu\, e^{-n\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}} \quad (6)$$

Dividiendo numerada y denominada por $kT$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{h\nu}{kT}\right) e^{-n(h\nu/kT)}}{\frac{1}{kT} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}} \quad (7)$$

Definir $\alpha = \frac{h\nu}{kT}$ (8)

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha\, e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}\, kT \qquad (9)$$

$$\bar{\mathcal{E}} = kT\, \frac{\sum_{n=0}^{\infty} -\alpha \frac{d}{d\alpha}\left(e^{-n\alpha}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} = kT\, \frac{-\alpha \frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} \qquad (10)$$

Definir $\quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \qquad (11)$

$$\bar{\mathcal{E}} = kT\, \frac{-\alpha \frac{d}{d\alpha} Z}{Z} = -\alpha kT \frac{d}{d\alpha}\left(\ln Z\right) \qquad (12)$$

Pero
$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = 1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \cdots$$
$$= 1 + x + x^2 + \cdots$$
$$= (1-x)^{-1} = (1-e^{-\alpha})^{-1} \qquad (13)$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\ln(Z)\right) = \frac{d}{d\alpha}\left(\ln\left(1-e^{-\alpha}\right)^{-1}\right) = -\frac{d}{d\alpha}\left(\ln\left(1-e^{-\alpha}\right)\right)$$
$$= -\frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} \qquad (14)$$

(12) y (14) $\Rightarrow \quad \bar{\mathcal{E}} = +\frac{\alpha kT e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} = h\nu \frac{e^{-h\nu/kT}}{1-e^{-h\nu/kT}} \qquad (15)$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \qquad (16)$$

✓ La ecuación (16) es la energía promedio de una onda electromagnética cuya frecuencia es $\nu$.

✓ Vemos que esta expresión difiere de la energía promedio clásica utilizada por Rayleigh-Jeans.

✓ Sin embargo, cuando $\nu \to 0$

$$e^{h\nu/kT} \simeq 1 + \frac{h\nu}{kT} + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} = kT \qquad (17)$$

que es el valor clásico de $\bar{\varepsilon}$.

✓ Y cuando $\nu \to \infty$, entonces $\bar{\varepsilon} \to 0$ y la curva de $R_T(\nu)$ vs $\nu$ "cae" a cero en concordancia con los datos experimentales.

✓ De hecho, con la expresión (16), la curva teórica de $R_T(\nu)$ vs $\nu$ ajusta perfectamente los datos experimentales. ✓✓✓

Good for Planck !!

De la página 2 del documento Radiación térmica 3 la densidad de energía contenida en las ondas estacionarias (presentes en la cavidad del cuerpo negro) cuyas frecuencias están en el rango entre $\nu$ y $\nu+d\nu$ está dada por

$$\rho_T(\nu)\,d\nu = \frac{N(\nu)\,d\nu}{V}\,\bar{\varepsilon}_\nu \qquad (18)$$

donde $N(\nu)\,d\nu = \dfrac{8\pi V}{c^3}\nu^2\,d\nu \qquad (19)$ (Ver ecuación (31) del documento Radiación térmica 3)

$N(\nu)\,d\nu$: número de ondas estacionarias con frecuencia entre $\nu$ y $\nu+d\nu$,

$V$ es el volumen de la cavidad del cuerpo negro,

$T$ es la temperatura de las paredes del cuerpo negro y de la cavidad (equilibrio térmico) y

$\bar{\varepsilon}_\nu$ es la energía promedio de cada onda de frecuencia $\nu$ que según la teoría de Planck es

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1} \qquad (20) .$$

Por otro lado, en la página 1' del documento Radiación térmica 4 se probó que la potencia irradiada (por el cuerpo negro) por unidad de area (Intensidad) en el rango de frecuencia entre $\nu$ y $\nu+d\nu$ (a una temperatura $T$) $R_T(\nu)\,d\nu$ está dada por

$$R_T(\nu)\,d\nu = \frac{c}{4}\,\rho_T(\nu)\,d\nu \qquad (21)$$

(18), (19), (20) y (21) $\Rightarrow$

$$R_T(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,d\nu\,\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}\left(\frac{c}{4}\right) \qquad (22)$$

$$R_T(\nu)\,d\nu = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}\right)d\nu \qquad (23)$$

Por otro lado, $\lambda\nu = c \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$ (24)

$$R_T(\nu)\,d\nu = -R_T(\lambda)\,d\lambda \Rightarrow R_T(\lambda) = -R_T(\nu)\frac{d\nu}{d\lambda} \qquad (25)$$

(23), (24) y (25) $\Rightarrow$

$$R_T(\lambda) = -\frac{2\pi h}{c^2}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}\left(-\frac{c}{\lambda^2}\right)d\lambda \quad \text{con} \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\Rightarrow R_T(\lambda) = \frac{2\pi h}{c^2}\,\frac{\left(\frac{c}{\lambda}\right)^3\left(\frac{c}{\lambda^2}\right)}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

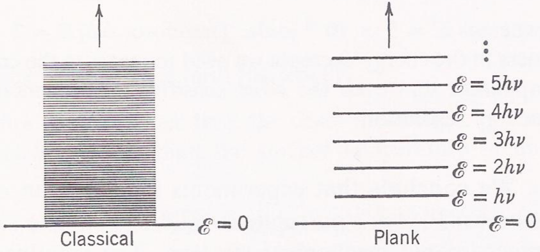
$$R_T(\lambda) = 2\pi h c^2\left(\frac{1}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)}\right) \qquad (26)$$

✓ Planck logró describir "perfectamente" el espectro de radiación de cuerpo negro ( $R_T(\lambda)$ vs $\lambda$ ) con $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J.s

✓ $h$ se denomina "constante de Planck"

**FIGURE 1–14**

*Left:* The allowed energies in a classical system, oscillating sinusoidally with frequency $\nu$, are continuously distributed. *Right:* The allowed energies according to Planck's postulate are discretely distributed since they can only assume the values $nh\nu$. We say that the energy is quantized, $n$ being the quantum number of an allowed quantum state.



**Example I-6.** A pendulum consisting of a 0.01 kg mass is suspended from a string 0.1 m in length. Let the amplitude of its oscillation be such that the string in its extreme positions makes an angle of 0.1 rad with the vertical. The energy of the pendulum decreases due, for instance, to frictional effects. Is the energy decrease observed to be continuous or discontinuous?

The oscillation frequency of the pendulum is

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.8 \text{ m/sec}^2}{0.1 \text{ m}}} = 1.6/\text{sec}$$

The energy of the pendulum is its maximum potential energy

$$\begin{aligned} mgh = mgl(1 - \cos\theta) &= 0.01 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/sec}^2 \times 0.1 \text{ m} \times (1 - \cos 0.1) \\ &= 5 \times 10^{-5} \text{ joule} \end{aligned}$$

The energy of the pendulum is quantized so that changes in energy take place in discontinuous jumps of magnitude $\Delta E = h\nu$, but

$$\Delta E = h\nu = 6.63 \times 10^{-34} \text{ joule-sec} \times 1.6/\text{sec} = 10^{-33} \text{ joule}$$

whereas $E = 5 \times 10^{-5}$ joule. Therefore, $\Delta E/E = 2 \times 10^{-29}$. Hence, to measure the discreteness in the energy decrease we need to measure the energy to better than two parts in $10^{29}$. It is apparent that even the most sensitive experimental equipment is totally incapable of this energy resolution. ◀

We conclude that experiments involving an ordinary pendulum cannot determine whether Planck's postulate is valid or not. The same is true of experiments on all other macroscopic mechanical systems. The smallness of $h$ makes the graininess in the energy too fine to be distinguished from an energy continuum. Indeed, $h$ might as well be zero for classical systems and, in fact, one way to reduce quantum formulas to their classical limits would be to let $h \to 0$ in these formulas. Only where we consider systems in which $\nu$ is so large and/or $\mathscr{E}$ is so small that $\Delta\mathscr{E} = h\nu$ is of the order of $\mathscr{E}$ are we in a position to test Planck's postulate. One example is, of course, the high-frequency standing waves in blackbody radiation. Many other examples will be considered in following chapters.